DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (2 h

Soit I = $[a, b]$ un intervalle fermé où a et b désignent deux nombres réels ($a < b$).

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de la variable réelle x, deux fois dérivables sur I.

Soit F l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de la variable réelle x continues sur I.

On considère l'équation différentielle linéaire :

$$y''(x) + g(x)\, y(x) = f(x) \tag{1}$$

à laquelle on associe l'équation dite homogène ou sans second membre :

$$z''(x) + g(x)\, z(x) = 0 \tag{2}$$

On supposera dans tout le problème que f et g sont dans F.

Dans ces conditions on admettra que les équations différentielles (1) et (2) possèdent des solutions définies sur I.

Première partie

ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE ASSUJETTIES A DES CONDITIONS AUX LIMITES

On se propose de déterminer, si elles existent, les solutions z non triviales de l'équation (2) s'annulant en $x = a$ et $x = b$ c'est-à-dire les fonctions z de F vérifiant :

$$z''(x) + g(x)\, z(x) = 0 \tag{2}$$

$$z(a) = z(b) = 0 \tag{3}$$

On admettra que l'ensemble des solutions de la seule équation (2) constitue un sous-espace vectoriel G de dimension 2 de l'espace vectoriel E.

I. 1. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (2) soient linéairement indépendantes est que le déterminant :

$$\Delta(z_1, z_2)(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z'_1(x) & z'_2(x) \end{vmatrix}$$

soit constant et non nul sur tout l'intervalle I.

On désignera par z_1 et z_2 les éléments d'une base de G, dans toute la suite du problème.

.../...

I. 2. Suivant les valeurs de la quantité $z_1(a)\, z_2(b) - z_1(b)\, z_2(a)$ déterminer le nombre de solutions de l'équation (2) satisfaisant les conditions aux limites (3).

DEUXIÈME PARTIE

RECHERCHE DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION LINÉAIRE ASSUJETTIE A DES CONDITIONS AUX LIMITES

Soit l'équation différentielle linéaire :

$$y''(x) + g(x)\, y(x) = f(x) \tag{1}$$

On admettra que la solution la plus générale de cette équation s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_0 de (1) la solution générale de l'équation homogène associée (2).

II. 1. On suppose l'existence d'une solution particulière y_0 de l'équation (1). Soient z_1 et z_2 les éléments d'une base de G.

Montrer que la condition $z_1(a)\, z_2(b) - z_1(b)\, z_2(a) \neq 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait une et une seule solution s'annulant en a et b (c'est-à-dire vérifiant : (4) $y(a) = y(b) = 0$).

On supposera cette condition vérifiée dans toute la suite de cette seconde partie.

II. 2. Montrer qu'il existe deux solutions non triviales z_3 et z_4 de l'équation homogène associée (2) telles que :

$$z_3(a) = 0 \tag{5}$$

$$z_4(b) = 0 \tag{6}$$

En déduire que z_3 et z_4 constituent une base pour G.

II. 3. Montrer que le déterminant

$$\Delta(z_3, z_4)(x) = \begin{vmatrix} z_3(x) & z_4(x) \\ z'_3(x) & z'_4(x) \end{vmatrix}$$

vérifie :

$$\Delta(z_3, z_4)(x) = -z'_3(a)\, z_4(a) = z_3(b)\, z'_4(b)$$

En déduire que l'on peut choisir z_3 et z_4 de telle sorte que $\Delta(z_3, z_4)(x) = 1$ pour tout x de I, sans modifier la généralité du problème.

II. 4. On suppose $\Delta(z_3, z_4)(x) = 1$ pour tout x de I et l'on pose :

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t) = z_3(x)\, z_4(t) & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant t \leqslant b \\ G_2(x, t) = z_3(t)\, z_4(x) & \text{si} \quad a \leqslant t \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{7}$$

On remarquera, sans le démontrer, que la fonction G des deux variables x et t est une fonction continue et symétrique de ces variables pour tout (x, t) de $I \times I$.

Montrer que cette fonction G possède en outre les propriétés suivantes (où x et t sont dans I) :

II. 4.1. La dérivée partielle $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ est définie pour tout (x, t) de $I \times I$ tel que $x \neq t$ et elle possède, à t fixé (différent de a et b) et x tendant vers t, deux limites, une à droite et l'autre à gauche, dont on calculera la différence.

II. 4.2. $G(x, t)$ satisfait, relativement à x (sauf en $x = t$), l'équation homogène associée (2).

II. 4.3. $G(x, t)$ satisfait, relativement à x, les conditions aux limites (3).

II. 4.4. On pose :

$$W(x) = \int_a^b G(x, t)\, f(t)\, dt \tag{8}$$

Montrer que W est la solution de l'équation différentielle (1) satisfaisant les conditions aux limites (4).

TROISIÈME PARTIE

APPLICATION

Soit l'équation différentielle :

$$y''(x) - a^2\, y(x) + x = 0 \tag{9}$$

(a nombre réel strictement positif) avec les conditions aux limites :

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{10}$$

III. 1. Montrer qu'il existe une solution unique y, définie sur l'intervalle fermé [0, 1], satisfaisant l'équation (9) et les conditions aux limites (10).

III. 2. Déterminer la fonction G.

Soit t_0 une valeur fixée de t ($0 < t_0 < 1$). Tracer dans un repère orthonormé l'allure générale du graphe de la fonction qui à x appartenant à I fait correspondre $G(x, t_0)$.

III. 3. En déduire l'expression de $y(x)$.

XXXXXX

1 116 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail